Linjärt beroende/ober.

(repetition)

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k \in \mathbb{R}^n$

är linjärt beroende om

nov 24-07:59

det finns

$a_1, a_2, \ldots, a_k$

inte alla noll

så att

$a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_k\bar{u}_k = 0$

Annars är de

linjärt oberoende.

nov 24-07:59

Det finns många olika sätt att kolla om de är oberoende.

- $a_1\bar{u}_1 + \ldots + a_k\bar{u}_k = 0$

  $\xrightarrow{?} a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$

- Finns bara triviala lösningar till $A\bar{x} = 0$

nov 24-07:59

där A har
$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$
som kolonner?

- Finns ledande etta i varje kolonn av A efter Gausselimination?

nov 24-07:59

Cramers regel

Om det finns en unik lösning till

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

så finns en formel

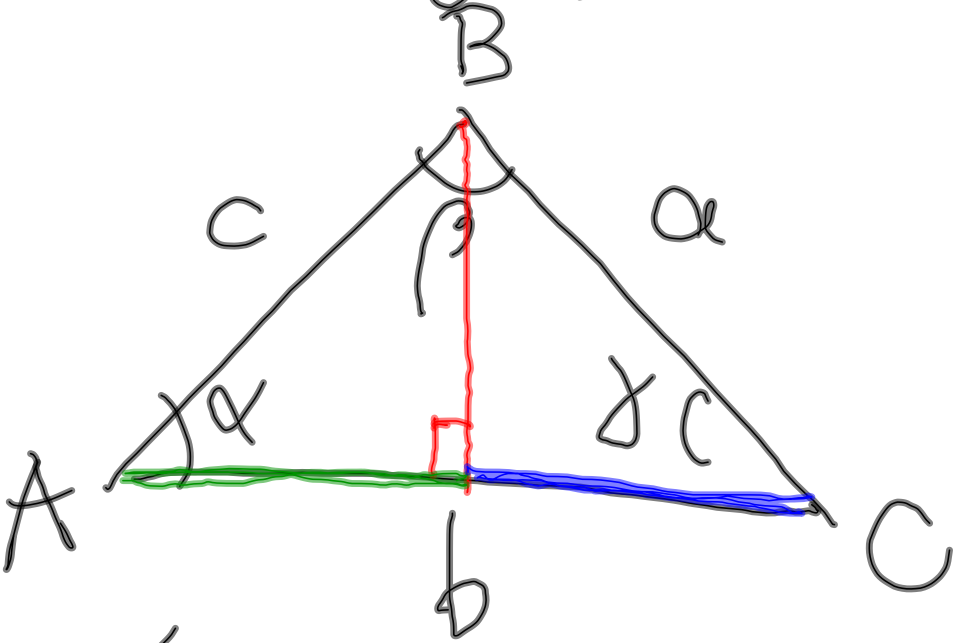
$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

nov 24-07:59

där A_i fås från A genom att byta kolumn i mot högerledet.

nov 24-07:59

Uppgift 5.34



$$b = \underline{c \cdot \cos\alpha} + \underline{a \cdot \cos\gamma}$$

nov 24-07:59

Givet a, b och c finns det unik lösning $\cos\alpha$, $\cos\beta$ och $\cos\gamma$?

Kolla med determinant för koefficientmatrisen.

nov 24-08:14

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \underline{0 \cdot 0 \cdot 0} + \underline{c \cdot a \cdot b} + \underline{b \cdot c \cdot a} - 0 \cdot a \cdot a - c \cdot c \cdot 0 - b \cdot 0 \cdot b$$

$$= 2abc$$

nov 24-08:15

Enligt Cramer får vi

$$\cos\alpha = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{pmatrix}$$

nov 24-08:17

$$\det(A_1) = a\cdot 0\cdot 0 + c\cdot a\cdot c + b\cdot b\cdot a - a\cdot a\cdot a - c\cdot b\cdot 0 - b\cdot 0\cdot c =$$

$$= a\cdot c^2 + a\cdot b^2 - a^3$$

nov 24-08:19

Alltså

$$\cos\alpha = \frac{ac^2+ab^2-a^3}{2abc} = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$

Vi har härlett cosinussatsen.

nov 24-08:20

Varför är fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ alltid linjärt beroende?

Matrisen A med vektorerna som

nov 24-08:23

kolonner har fler kolonner än rader. Det finns högst en ledande etta i varje rad $\Longrightarrow$ räcker ej till en i varje kolonn.

nov 24-08:23

Vi har sett

standardbasen

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$

$\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$

$\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^t$

$\vdots$

$\bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)^t$

nov 24-08:25

Vi kan använda detta för att skriva alla vektorer;

$$(a,b,c)^t = a(1,0,0)^t + b(0,1,0)^t + c(0,0,1)^t$$

nov 24-08:26

Om $\bar{T}$ är en linjär avbildning och vi vet vad $\bar{T}(\bar{e}_1), \bar{T}(\bar{e}_2), \dots, \bar{T}(\bar{e}_n)$ är så kan vi räkna ut $\bar{T}(\bar{u})$ för alla $\bar{u}$.

nov 24-08:27

Ex:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = aT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + bT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan använda detta för att bestämma matrisen för T.

nov 24-08:28

Ibland är det bra att byta koordinater dvs att byta basvektorer.

nov 24-08:29

Vi kan se om

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$

utgör en bas för

$\mathbb{R}^n$ genom att se på

$\det(A)$ där $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$

är kolonnerna i A.

nov 24-08:33

Koordinater

Förut var koordinaterna för vektorn $(1, 0, -2)$ alltid $(1, 0, -2)$ men nu kan vi välja en annan bas

nov 24-08:34

Och för andra koordinater. <u>Ex</u>

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \neq 0$$

Hur hittar vi koordinaterna för $(1,0,-2)^t$ i basen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Sök a_1, a_2, a_3 så att

$$a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

nov 24-08:36

dvs lös

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow a_3 = -2, \; a_2 = -a_3 = 2$

$a_1 = 1 - a_2 - a_3 = 1$

Alltså är koordinaterna för $(1, 0, -2)^T$ relativt

nov 24-08:38

basen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$

$(1, 2, -2)$

dvs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \bar{u}_1 + 2 \cdot \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3$$

nov 24-08:39

För att hålla reda på vilken bas vi använder ger vi basen ett namn, t.ex

$$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$$

$$E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

nov 24-08:40

Vi kan förtydliga

att

$$\bar{v} = (1,0,-2)_E^t =$$

$$= (1,2,-2)_B^t$$

nov 24-08:41

Exempel på varför ON är bra.

Se på projektionen på planet

$$x+y+z=0.$$

Det skulle vara lättare om

nov 24-08:42

två av axlarna
låg i planet och
den tredje var
ortogonal mot
planet.

nov 24-08:44

Välj två linjärt oberoende vektorer i planet.

$(x+y+z=0)$

ex $\bar{u}_1 = (1,1,-2)^t$

och $\bar{u}_2 = (3,1,-4)^t$

nov 24-08:45

$\bar{n} = (1,1,1)$ kan väljas som den tredje

$$\bar{u}_3 = (1,1,1)^t$$

$T(\bar{u}_1) = \bar{u}_1$, $T(\bar{u}_2) = \bar{u}_2$

$T(\bar{u}_3) = 0$

nov 24-08:47

Det blir lätt att skriva upp matrisen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nov 24-09:02

Standardbasen

är också

ortogonal och

till och med

ortonormal

nov 24-09:04

Vår bas för $\mathbb{R}^3$ från problemet innan var nästan ortogonal!

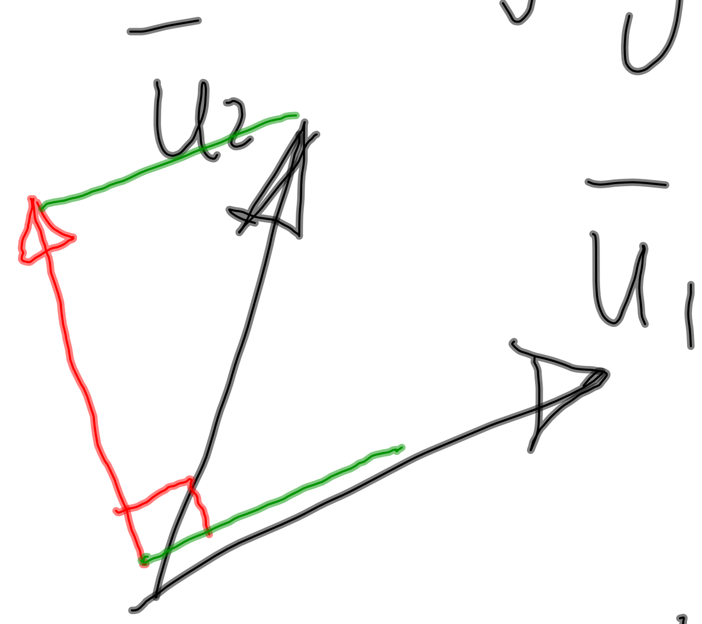
$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = 0$$

$$\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3 = 0$$

men $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$

nov 24-09:05

Rita figur



Vi kan ersätta $\bar{u}_2$ med

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \mathrm{Proj}_{\bar{v}_1} \bar{u}_2$$

nov 24-09:08

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{12}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nov 24-09:10

Alltså

$\bar{u}_1, \bar{v}_2, \bar{u}_3$ är

en ortogonal bas.

Vi kan normera

genom att dela på

längden och få

nov 24-09:12

en ortonormal bas

$$\frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|}, \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|}, \frac{\bar{u}_3}{|\bar{u}_3|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

nov 24-09:13

Vi kan få koordinaterna för en vektor genom skalärprodukt;

<u>Ex</u> $(1,2,3)^t$

ger koordinater

nov 24-09:15

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 6$$

nov 24-09:16

Alltså är

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} \\ 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}_F$$

där F är vår nya ortonormale bas.

nov 24-09:18

Om vi projicerar den vektorn på planet får vi

$$\begin{pmatrix} -3/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_F = -\frac{3}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_E - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E$$

nov 24-09:19

$$= -\frac{3}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_E - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_E$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E$$

nov 24-09:20

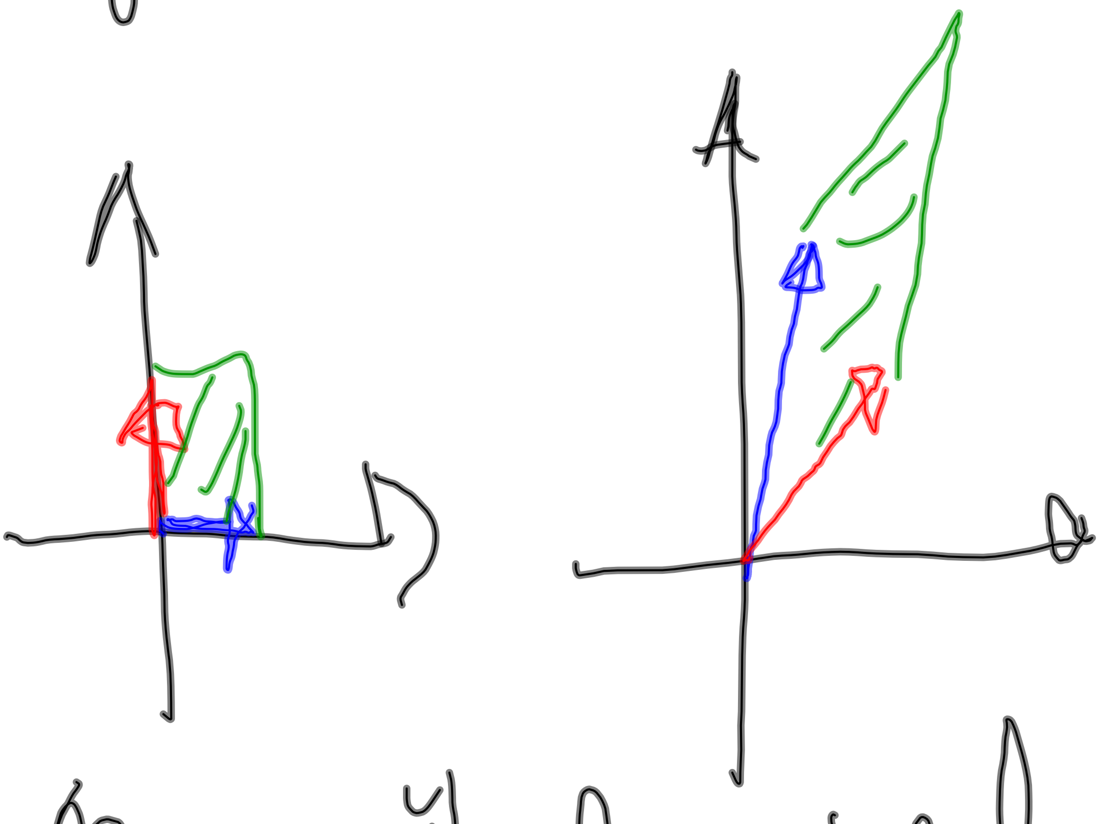
Bra med basbyte för andra linjära avbildningar

<u>Ex:</u> T från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

nov 24-09:22

Vi har sett
hur T fungerar
på standardbasen



Arean ändras med
faktor 5.

nov 24-09:23

Försök att hitta bättre bas för att beskriva T.
Vill att T ska skicka basvektorerna på vektorer i samma riktning.

nov 24-09:25

Testa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-a & 2 & 0 \\ 4 & 3-a & 0 \end{array}\right)$$

Vi vill ha icke-triviala lösningar.

nov 24-09:26

och det får vi

bara när

$$\det\begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 4 & 3-a \end{pmatrix} = 0$$

dvs då

$$(1-a)(3-a) - 2\cdot 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 - 8 = 0$$

nov 24-09:28

$$\Leftrightarrow a^2-4a-5=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2-4-5=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2=9$$

$$\Leftrightarrow a-2=\pm 3$$

$$\Leftrightarrow a=5, \text{ eller } a=-1$$

nov 24-09:29

Lös ekvations-systemet för $a=5$;

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-5 & 2 & 0 \\ 4 & 3-5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nov 24-09:30

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Motsvarande för $a = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-(-1) & 2 & 0 \\ 4 & 3-(-1) & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

nov 24-09:31

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nov 24-09:32

Var är v?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nov 24-09:33

Det är lättare att förstå hur T fungerar i basen $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ eftersom den förlänger med faktor 6 i ena ledden och byter riktning i andra.

nov 24-09:36

Matrisen för T
i den basen blir

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– en diagonalmatris

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \mapsto 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

nov 24-09:38

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B = 1\cdot\bar{u}_1 + 0\cdot\bar{u}_2$$
$$= \bar{u}_1$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_B = 0\cdot\bar{u}_1 + 1\cdot\bar{u}_2$$
$$= \bar{u}_2$$

nov 24-09:39